Série de révision complexe **Classes : 4Maths**

Exercice N°1 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,

On donne les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B =-1$. Soit f l'application du plan privé du point B dans lui même qui à tout M(z) associe le point M'(z') tel que $z'=\dfrac{z-1}{z+1}$

1/a) Déterminer l'ensemble des points M pour que z' soit imaginaire pur

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f

2/a) Vérifier que $(z'-1)(z+1)=-2$, en déduire AM'.BM= 2 et $(\vec{u},\overrightarrow{AM'})+(\vec{u},\overrightarrow{BM})\equiv\pi[2\pi]$

b) Montrer que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 2 , le point M' appartient à un cercle C' que l'on précisera

3/ Soit K le point d'affixe $z_K=-2+i\sqrt{3}$ et K'=f(K)

a)Donner la forme exponentielle de z_K+1,en déduire que $K\in\zeta_{(B,2)}$ puis construire K

b) Soit Q le point d'affixe $z_Q=-\overline{z_K}$

i) Montrer que $aff(\overrightarrow{AK'})=-e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et que$aff(\overrightarrow{AQ})=-2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

ii) En déduire un procédé de construction du point K'=f(K)

Exercice N°2 I/ On considère l'équation (E) : $z^2+ie^{i\frac{\pi}{3}}z+1-e^{i\frac{\pi}{3}}=0$

1/ Vérifier que $ie^{\frac{i\pi}{3}}=i-e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $1-e^{\frac{i\pi}{3}}=-ie^{i\frac{\pi}{6}}$

2/Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

II/ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A , M et N d'affixes respectives 1, i a et – a ^{2} où a est un nombre complexe de module 1 et d'argument θ tel que $0<\theta<\pi$

1/ Déterminer et construire l'ensemble des points M lorsque θ varie

2/Montrer que le triangle AMN est équilatéral direct si et seulement si a est une solution de (E)

3/ Construire les points M et N dans le cas où AMN est équilatéral direct

III/ Soit P le point d'affixe a et H l'orthocentre du triangle OAP d'affixe h

1/ a) Vérifier que $1+e^{i\theta}=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

b) Montrer que $h+\overline{h}=a+\overline{a}$ et que $h=\overline{h}e^{i\theta}$ c) Déduire $h=\dfrac{\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}$

2/ Dans cette question $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\setminus\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$ La médiatrice du segment $[OA]$ coupe la droite (OH) au point I

a) Montrer que I est centre du cercle circonscrit au triangle OAP

b) Montrer que l'affixe du point I est $\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta}{2}}$

Exercice N°3 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,

Soit α un nombre complexe et M le point d'affixe α

1/ Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $\mathbf{z^2-(2+i(\alpha+\overline{\alpha}))z+1+i(\alpha+\overline{\alpha})-|\alpha|^2=0}$

a) Vérifier que $\mathbf{1+i\alpha}$ est une sokution de (E)

b) Déduire l'autre solution de – E)

On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $1+i\alpha$ et $1+i\overline{\alpha}$

2/ Déterminer l'ensemble des points M tel que M_1 et M_2 sont confondus.

Dans toutes la suite de l'exercices, on suppose que que α n'est pas réel.

3/ Montrer que M1 et M_2 appartiennent à un cercle C_α de centre le point A d'affixe 1 et de rayon $|\alpha|$

4/ Montrer que les droites (AM_1)et (OM) sont perpendiculaires

5/ On pose $\alpha = x + iy$ ou x et y sont deux réels

a- Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $1+i\alpha$ et $1+i\overline{\alpha}$

b- Montrer que la droite (M_1M_2) est parallèle à l'axe des abscisses.

6/ Construire les points M_1 et M_2

7/ a-Déterminer l'enemble des points M pour que M_1 et M_2 soient diamétralement opposés.

b- Montrer dans ce cas que l'aire du triangle MM_1M_2 est égale à $|\alpha|^2$

Exercice N°4 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soit m un nombre complexe de module 1 et tel que $\arg(m) \equiv \theta[2\pi]$, $\theta \in]-\pi,\pi]$

1/ On considère dans l'équation $(E_m): \overline{m}z^2 - (1+\overline{m})z + 2(1-m) = 0$

a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta_m = (\overline{m}-3)^2$

b) Résoudre dans l'équation (on notera z_1 la solution de module 2 et z_2 l'autre solution)

2/ Soit M le point d'affixe 2m , déterminer et construire l'ensemble des points M lorsque θ varie

3/ Dans cette question on prend $m = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

a) Résoudre dans l'équation (E'): $z^3 = z_1$

b) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé dans un repère la courbe C d'équation $y = x^3$
Construire sur le même graphique les images des solutions de l'équation (E')

4/ Dans cette question, on prend $m = e^{i\frac{\pi}{3}}$ a)Mettre sous forme exponentielle z1 et z2

b)Résoudre alors dans l'équation (E''):$e^{-\frac{i\pi}{3}}z^4 - (1+e^{-\frac{i\pi}{3}})z^2 + 2(1-e^{\frac{i\pi}{3}}) = 0$

Exercice N°5

Soit m un nombre complexe , on considère dans l'équation $(E_m): z^2 - (2\sqrt{3}m+1)z + 4m^2 + (\sqrt{3}+i)m = 0$

1/ Résoudre dans l'équation (Em)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

2/ On donne les points A, B , M , M1et M2 d'affixe respectives

$$z_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \text{ , } z_2 = \frac{-\sqrt{3}-i}{4}, z_M = m \text{ , } z_1 = (\sqrt{3}-i)m+1 \text{ et } z_2 = (\sqrt{3}+i)m$$

a)Montrer que si $m \neq \frac{-i}{2}$ alors $\frac{z_2 - z_A}{z_1 - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, en déduire a nature du triangle AM_1M_2

b) Déterminer l'ensemble Γ des points M(m) tel que $|(\sqrt{3}-i)m+1| = 4$

c) Montrer que si $m \neq \frac{-\sqrt{3}-i}{4}$ alors $(\vec{u},\overrightarrow{OM_1}) \equiv -\frac{\pi}{6} + (\vec{u},\overrightarrow{BM})$

d) Soit M un point de Γ , construire les points M_1 et M_2 à partir du point M

3/ On pose $m = \frac{1}{2}e^{i\theta}; \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

a) Donner l'écriture $z_1 - z_A$

b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle l'aire d triangle AM_1M_2 est maximale

c) Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ varie

d) Montrer que M_1 est l'image du point M par une similitude directe que l'on caractérisera

e) En déduire l'ensemble des points M_1 lorsque θ varie